*Студенческий математический журнал, 2024, № 2. С. 3–8.*

# Некоторые свойства пространства $L_2$

**Ларионова О. В.**
1318319@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Цель данной работы – изучение пространства измеримых функций, суммируемых с квадратом, и его основных свойств. В статье рассмотрены основные понятия и определения, рассмотрена линейность изучаемого пространства, его норма и скалярное произведение, изучены полнота и сепарабельность рассматриваемого пространства, предкомпактные множества в нём. В связи с выбранной тематикой решены практические задачи.

**Ключевые слова:** измеримая функция, функция с интегрируемым квадратом, пространство $L_2$, линейное пространство, нормированное пространство, скалярное произведение, полнота, предкомпактные множества, сепарабельность

**Для цитирования:** Ларионова О. В. 2024. Некоторые свойства пространства $L_2$. *Студенческий математический журнал*, 2: 3–8.

---

**1. Введение.** Пространство $L_2$ является классическим примером гильбертова пространства, которое в свою очередь играет важную роль в функциональном анализе, в различных его приложениях к дифференциальным уравнениям, геометрии, математической физике, теории представлений.

**2. Пространство $L_2$. Основные понятия и определения.** Для изучения пространства $L_2$ следует для начала вспомнить основные определения, связанные с измеримыми функциями и интегралом Лебега.

**Определение.** *Пусть $f$ – функция, определённая на измеримом пространстве $X$ со значениями в расширенной системе вещественных чисел. Функция $f$ называется измеримой, если множество*

$$\Big\{x \mid f(x) > a\Big\} \tag{1}$$

*измеримо при каждом вещественном $a$* [1].

Рассмотрим суммы $S_T = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k|E_k|$ и $s_T = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k|E_k|$, $s_T \leqslant S_T$ называются соответственно верхней и нижней суммами разбиения $T$.

Для любой ограниченной функции $f(x)$ множества $E$ $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ ограничены. Поэтому существует точная нижняя грань множества $\{S_T\}$ и точная верхняя грань множества $\{s_T\}$. Будем называть их соответственно верхним интегралом Лебега и нижним интегралом Лебега и обозначать $\overline{I}$ и $\underline{I}$.

**Определение**. *Ограниченная на множестве конечной меры $E$ функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Лебегу) на этом множестве, если $\overline{I} = \underline{I}$, то есть верхний и нижний интегралы Лебега совпадают.*

Число $\overline{I} = \underline{I}$ называют интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству $E$ и обозначают

$$\int\limits_E f(x)dx.$$

**Определение.** *Функция $f(x)$ называется суммируемой на $E$ (по Лебегу), если существует конечный предел $I_N(f)$ $(N \to \infty)$, называемый интегралом от $f(x)$ по $E$:*

$$\lim_{N\to\infty} I_N(f) = \int\limits_E f(x)dx.$$

Рассмотрим пространство $X$ с мерой $\mu$ и действительные измеримые функции на нём, которые определены почти всюду на $X$. Обусловим, что эквивалентные функции между собой не различаются.

**Определение.** *Функцией с интегрируемым квадратом на пространстве $X$ является такая функция $f(x)$, для которой существует (конечен) следующий интеграл* [1]

$$\int f^2(x)d\mu.$$

**Определение.** *Пространство $L_2$ – это пространство измеримых функций на $X$, суммируемых (интегрируемых) с квадратом.*

Иначе говоря, совокупность функций с интегрируемым квадратом на некотором пространстве $X$ и будет являться интересующим нас пространством $L_2$.

**3. Линейность пространства $L_2$, норма, скалярное произведение.** Вспомним, что является линейным пространством [4].

**Определение.** *Непустое множество $M$ элементов $x,\ y,\ z \in M$ называется линейным пространством, если оно удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *Однозначно определена сумма элементов, причём:*

1) $x + y = y + x$ (*коммутативность*);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*ассоциативность*);

3) $\exists 0 \in M \mid x + 0 = 0 + x = x$ (*существование нулевого элемента*);

4) $\forall x \in M\ \exists(-x) \in M \mid x + (-x) = 0$ (*существование противоположного элемента*).

2. *Определено произведение элемента на число, удовлетворяющее свойствам:*

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

2) $1 \cdot x = x$;

3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Линейные комбинации функций из пространства $L_2$ тоже принадлежат $L_2$. Очевидно, что сложение функций из этого пространства и умножение их на числа удовлетворяют всем условиям предыдущего определения линейного пространства. Таким образом, пространство интегрируемых с квадратом функций $L_2$ является линейным пространством.

**Определение.** *Пусть $E$ — линейное пространство, $x \in E$. Нормой элемента $x$ называется функция $\|x\| : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (аксиомам нормы):*

1. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ *только при* $x = 0$;

2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha$ — *действительное (комплексное) число*;

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*аксиома треугольника*).

**Определение.** *Линейное пространство с введённой на нём нормой называется линейным нормированным пространством.*

Напомним, что метрикой (расстоянием) на некотором множестве $M$ называется функция $\rho(x; y)$, которая определена $\forall x,\ y \in M$, и обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x; y) \geqslant 0$, $\rho(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $\rho(x; y) = \rho(y; x)$;

3. $\rho(x; z) \leqslant \rho(x; y) + \rho(y; z)$.

Пара $(M; \rho)$ называется метрическим пространством.

Всякое нормированное пространство наделено метрикой [3]:

$$p(x; y) = \|x - y\|.$$

Угол $\varphi$ между векторами $x$ и $y$ в пространстве с введённым скалярным произведением задаётся формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(x; y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{2}$$

**Теорема (неравенство Коши – Буняковского).** *Пусть $E$ — евклидово пространство, тогда $\forall x,\ y \in E$ выполняется $|(x; y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, равенство $|(x; y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ возможно тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$.*

**Теорема (неравенство треугольника).** $\forall x,\ y \in E$ *выполняется неравенство треугольника*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Пусть в пространстве $L_2$ для произвольных функций этого пространства $f(x),\ g(x)$ скалярное произведение задаётся формулой:

$$(f; g) = \int f(x)g(x)d\mu.$$

Очевидно, что требования скалярного произведения выполняются, а именно:

1. $(f; g) = (g; f)$.

Действительно,

$$(f; g) = \int f(x)g(x)d\mu = \int g(x)f(x)d\mu = (g; f).$$

2. $(f; f) > 0$, если $f \neq 0$, выполняется за счёт условия не различать эквивалентные между собой функции, за нулевой элемент принимаем совокупность всех функций на $X$, которые эквивалентны $f \equiv 0$.

3. $(\lambda f; g) = \lambda(f; g)$:

$$(f; g) = \int \lambda f(x)g(x)d\mu = \lambda \int f(x)g(x)d\mu = \lambda(f; g).$$

4. $t(x) \in L_2$, $(f + t; g) = (f; g) + (t; g)$:

$$(f + t; g) = \int [f(x) + t(x)]g(x)d\mu = \int f(x)g(x)d\mu + \int t(x)g(x)d\mu = (f; g) + (t; g).$$

Таким образом, пространство $L_2$ является евклидовым пространством со скалярным произведением:

$$(f;g) = \int f(x)g(x)d\mu. \tag{3}$$

Это пространство состоит из классов эквивалентных между собой функций с интегрируемым квадратом.

Норма в рассматриваемом пространстве определяется формулой:

$$\|f\| = \sqrt{(f;f)} = \sqrt{\int f^2(x)d\mu}. \tag{4}$$

Расстояние (метрика) между элементами пространства $f$ и $g$:

$$\rho(f;g) = \|f-g\| = \sqrt{(f-g;f-g)} = \sqrt{\int [f(x)-g(x)]^2 d\mu}.$$

В $L_2$ выполнены неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника.

**4. Полнота пространства $L_2$. Сепарабельность.** Приведём определение полноты. Пусть $X$ – метрическое пространство.

**Определение.** *Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной, если:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,\ m \geqslant N\ :\ \rho(x_n;x_m) < \varepsilon.$$

Определение через норму:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,\ m \geqslant N\ :\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon \ \text{ или другими словами:}$$

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \ \text{ при } \ n,\ m \to \infty.$$

**Определение.** *Если каждая фундаментальная последовательность сходится в метрическом пространстве, то оно называется полным.*

**Определение.** *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

**Определение.** *Гильбертовым пространством является полное евклидово пространство.*

Сходимость функциональной последовательности относительно метрики $L_2$ называется сходимостью в среднем.

**Теорема (о полноте $L_2$).** *При $\mu(X)<\infty$ пространство $L_2(X;\mu)$ полно.*

**Доказательство.** □ Пусть $\{f_n(x)\} \in L_2$ — фундаментальная последовательность, то есть

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \ \text{ при } \ n,\ m \to \infty.$$

$$\int |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leqslant [\mu(x)]^{1/2} \left\{ \int (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu \right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon [\mu(x)]^{1/2}. \tag{5}$$

Выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая сходится почти всюду к функции $f(x)$. Для достаточно больших $k$ и $l$ в неравенстве

$$\int (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 d\mu < \varepsilon$$

можно использовать теорему Фату и с её помощью перейти к пределу при $l \to \infty$. После перехода получим

$$\int (f_{n_k}(x) - f(x))^2 d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Из этого следует, что $f(x) \in L_2$ и $f_{n_k} \to f$. Насколько нам известно, фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся, сходится к тому же пределу. ■

Теорема о полноте остаётся справедливой и в случае бесконечной меры ($\mu(X)=\infty$).

Таким образом, пространство $L_2$ как нормированное и полное является банаховым пространством. В то же время, $L_2$ является гильбертовым.

Перейдём к определениям плотности. Пусть $X$ — метрическое пространство.

**Определение.** *Множество $M \in X$ называется плотным в множестве $A$, если $\overline{M} \supset A$.*

**Определение.** *Множество $M \in X$ называется всюду плотным в $X$, если $\overline{M} = X$.*

**Определение.** *Если в метрическом пространстве существует счётное и всюду плотное множество, то* *это пространство называется сепарабельным.*

**Теорема.** *Если мера $\mu$ имеет счётный базис, то в $L_2(X;\mu)$ существует счётное всюду плотное множество.*

Исходя из вышесказанного, изучаемое пространство $L_2$ является сепарабельным.

**5. Предкомпактные множества $L_2$. Решение задач в пространстве $L_2$.** Пусть $\Delta = (a;b)$ — интервал, мера которого известна: $|\Delta| = b - a > 0$.

**Определение.** *Любая конечная или счётная система интервалов $\{\Delta_n\}$ является покрытием множества, если сумма этих интервалов содержит это множество.*

**Определение.** *Множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие* [2].

Компактность тесно связана с понятием полной ограниченности.

Пусть $M$ — некоторое множество в метрическом пространстве $X$ и $\varepsilon$ — некоторое положительное число.

**Определение.** *Множество $A$ из $X$ называется $\varepsilon$-сетью для $M$, если для любых точек $x$ из $M$ существует хотя бы одна точка $a$ из $A$ такая, что $\rho(x;a) \leqslant \varepsilon$.* При этом $A$ не обязано содержатся в $M$ и может не иметь с ним общих точек.

**Определение.** *Множество называется вполне ограниченным, если для него существует конечная $\varepsilon$-сеть* $\forall\varepsilon > 0$. При этом очевидно, что вполне ограниченное множество обязательно является ограниченным как сумма конечного числа ограниченных множеств. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Критерий Хаусдорфа.** *Множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограниченно, то есть у него существует конечная $\varepsilon$-сеть.*

**Теорема Арцела – Асколи.** *Семейство называется предкомпактным тогда и только тогда, когда оно равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Пусть $M$ – некоторое множество функций, содержащееся в $L_2$.

**Определение.** *Функция $f(x)$ из множества $M$ называется равностепенно непрерывной в среднем, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такая, что при $|\Delta| < \delta$:*

$$\Big(\int\limits_{\Omega} |f(x+\Delta) - f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} < \varepsilon \ \ \forall f(x) \in M,$$

*где $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.*

**Теорема Рисса.** *Для компактности ограниченного и замкнутого в $L_2(\Omega)$ множества $M$ необходимо и достаточно, чтобы функции этого множества были равностепенно непрерывны в среднем* [1].

**Определение.***Ядром усреднения радиуса 1 (единичным ядром усреднения) называется функция $\omega_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет свойствам:*

1. $\omega_1(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\omega_1(x)$ *бесконечно дифференцируема в* $\mathbb{R}^n$;
3. *при* $|x| \geqslant 1\ \omega_1(x) = 0$;
4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_1(x)dx = 1.$

**Определение.** *Ядром усреднения радиуса $\rho > 0$ называется функция* $\omega_\rho(x) = \dfrac{1}{\rho^n}\omega_1\left(\dfrac{x}{\rho}\right)$.

Приведём ещё одно определение равностепенной непрерывности в среднем.

**Определение.** *Пусть $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ – некоторое множество функций. Это множество называется равностепенно непрерывным в среднем квадратичном, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall z \in X\ \forall\alpha\ \|z\| < \delta\ \|f_\alpha(x+z)- -f_\alpha(x)\|_2 < \varepsilon$.*

**Теорема (критерий предкомпактности в $L_2$).** *Пусть $X$ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, тогда множество $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда:*

1. $\{f_\alpha(x)\}$ *ограничено в пространстве* $L_2$;
2. $\{f_\alpha(x)\}$ *равностепенно непрерывно в среднем квадратичном.*

Перейдем к решению практических задач.

**Задача 1.** Показать, что пространство $L_2[a;b]$ сепарабельно.

**Решение.** Рассмотрим множество $M$, которое представляет собой совокупность всех функций $x = x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, для которых выполняется:

$$\int\limits_a^b |x(t)|^2 < +\infty,$$

$x(t)$ — гладкие функции.

Элементы этой совокупности, этого множества, можно пронумеровать натуральными числами, следовательно, $M$ – счётное множество.

Функциями $x(t)$ множества $M$ на $[a;b]$ можно приблизиться к функциям пространства $L_2[a;b]$, следовательно, $M$ является всюду плотным множеством.

Таким образом, найдено счётное всюду плотное множество в $L_2[a;b] \Rightarrow L_2[a;b]$ является сепарабельным пространством.

**Задача 2.** Найти угол $\varphi$ в пространстве $L_2[0;\pi]$ между элементами: $x_1(t) = = \sin t$; $x_2(t) = t$ [5].

**Решение.** Угол между элементами будем искать по формуле (2). Для начала найдём скалярное произведение по формуле (3):

$$(x_1;x_2) = \int_0^\pi x_1(t)\cdot x_2(t)dt = \int_0^\pi \sin t\cdot t dt,$$

последний интеграл возьмём по частям

$$\int_0^\pi \sin t\cdot t dt = [u=t;\ dv = \sin t dt;\ du = dt;\ v = -\cos t] = -t\cdot \cos t\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos t dt =$$

$$= -t\cdot\cos t\Big|_0^\pi + \sin t\Big|_0^\pi = -\pi\cdot\cos(\pi) + 0 = -\pi\cdot(-1) = \pi.$$

Переходим к отысканию норм элементов по формуле (4):

$$\|x_1\| = \sqrt{\int_0^\pi x_1^2(t)dt} = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 t dt}.$$

Найдём интеграл под корнем, для этого вспомним формулу для понижения степени, а именно:

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2},$$

применяя эту формулу и используя свойства интегралов, придём к выражению:

$$\int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2t)dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, окончательно получим: $\|x_1\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Аналогично вычислим норму второго элемента:

$$\|x_2\| = \sqrt{\int_0^\pi x_2^2(t)dt} = \sqrt{\int_0^\pi t^2 dt};\quad \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3};\quad \|x_2\| = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}}.$$

Найденные выражения подставим в формулу (2):

$$\cos\varphi = \frac{(x_1;x_2)}{\|x_1\|\cdot\|x_2\|} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^4}{6}}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{\pi^2} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

Таким образом, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)$.

**Ответ:** $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)$.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе были рассмотрены основные понятия и определения, связанные с линейностью пространства $L_2$, его нормой и скалярным произведением, изучены полнота и сепарабельность рассматриваемого пространства. Также были определены предкомпактные множества в этом пространстве и решены практические задачи.

### Список литературы


1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 544 с.

2. Кутателадзе С. С. 2001. Основы функционального анализа. Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 354 с.

3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. 1965. Элементы функционального анализа. М., Наука, 520 с.
4. Наймарк М. А. 1968. Нормированные кольца М., Наука, 664 с.
5. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. 1984. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М., Наука, 258 с.

*Поступила в редакцию 28.10.2023*

---

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Ларионова Ольга Викторовна** – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

**РУКОВОДИТЕЛЬ**

**Ковалева Лидия Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

kovaleva_l@bsu.edu.ru