Студенческий математический журнал, 2023 С. 69–74.

СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

А. Д. Аверина

E-mail: 1242072@bsu.edu.ru

Аннотация. Работа посвящена изучению и анализу научных источников, связанных с интегралом типа Коши. Во введении приведен краткий исторический обзор. В первом пункте дается определение интеграла типа Коши, его значения и основные свойства. Далее рассматриваются простейшие задачи для прямолинейных разрезов.
Ключевые слова: интеграл типа Коши, условие Гёльдера, краевая задача

Для цитирования: Аверина А. Д. 2023. Свойства и применение интеграла типа Коши. Студенческий математический журнал. 2023: 69–74.

---

1. Введение. Данная работа посвящена интегралу типа Коши, его свойствам и применению в решении некоторых краевых задач.

Огюстен Луи Коши рассмотрел еще в 1831 г. интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=f(z),$$

в котором Γ– гладкий замкнутый или незамкнутый контур, τ– комплексная координата точек контура, а $\varphi(\tau)$– непрерывная функция точек контура, но тема интеграла типа Коши актуальна и сегодня. Изучение этого интеграла продолжается и в наше время. Остается множество открытых вопросов по теме интеграла типа Коши и его обобщений, поэтому исследования продолжаются.

Неизвестно, кто из ученых предложил принимать произвольную функцию за плотность интеграла типа Коши. Можно сказать, что Юлиан Васильевич Сохоцкий первый изучил поведение интеграла типа Коши. В 1873 году в диссертации [21] Ю. В. Сохоцкий впервые получил формулы для граничных значений интеграла типа Коши. Но, к сожалению, общество не приняло во внимание исследования Ю. В. Сохоцкого. Позже подобные формулы вывел Josip Plemelj [28]. Предполагая, что подынтегральная функция соответствует условию Гёльдера, J. Plemelj доказал формулы Сохоцкого. Благодаря открытиям J. Plemelj стало возможным решение краевых задач с помощью интеграла типа Коши. Не менее важными являются заслуги математика Axel Harnack, который смог в 1885 году записать интеграл типа Коши как сумму двух потенциалов, что позволило облегчить процесс решения некоторых задач [27].

В 1918 году И. И. Привалов выводит формулы Сохоцкого для функций, которые удовлетворяют условию Гёльдера [16]. В 1922 году Н. И. Мусхелишвили проводит ряд исследований, в которых задачи теории упругости решаются с помощью интеграла типа Коши [12]. Стоит также упомянуть Л. Г. Магнарадзе [9] и С. Г. Михлина [10], которые также внесли свой вклад в развитие теории интеграла типа Коши.

В XX веке в своей книге «Краевые задачи» Фёдор Дмитриевич Гахов объединил всю известную теорию интеграла типа Коши [3]. Исследования Ф. Д. Гахова поспособствовали тому, что стало возможным получить общую информацию об интеграле типа Коши при классических условиях в одном источнике. Некоторые пункты 1 главы данной выпускной квалификационной работы включают в себя исследования Ф. Д. Гахова.

В исследованиях современных ученых-математиков также можно найти интеграл типа Коши и его обобщения. Это ученые из НИУ «БелГУ» и других ведущих вузов: В. Б. Васильев [1], А. В. Глушак [4], А. Г. Джваршейшвили, В. Е. Петрова [13], В. А. Полунин [14], С. М. Ситник [17], А. П. Солдатов [19], Б. В. Хведелидзе [23], В. Г. Челидзе [24] и О. В. Чернова [25].

В соответствии с изложенным выше можно сделать вывод, что тема «Свойства и применение интеграла типа Коши» не теряет своей актуальности.

2. Необходимые теоретические сведения.

Пусть Γ– гладкий или кусочно-гладкий контур D^{+}– область внутри контура, D^{-}– область вне контура. Вновь рассмотрим формулу (1.1) в случае, когда $z\in D$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=f(z).$$

В классической теории утверждается, что интегрируемая функция $f(\tau)$ является аналитической.

Но тем не менее в случае, когда область ограничена кусочно-гладкой кривой, достаточным условием является непрерывность функции $f(\tau)$.

Определение 1.1. *Если функция $\varphi(\tau)$ непрерывна на контуре Γ, то интеграл*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{1.2}$$

называется ***интегралом типа Коши***. *Подынтегральная функция $\varphi(\tau)$ в (1.2) будет представлять плотность интеграла типа Коши, а его ядром обычно называют выражение* $\frac{1}{\tau - z}$.

Так как функция $\Phi(z)$ аналитична, то мы можем сделать вывод, что как и в случае (1.1), можно доказать, что функция $\Phi(z)$ так же является аналитической в области D^+ и D^-. Для интеграла типа Коши непрерывность подынтегральной функции уже не является обязательным условием.

Отметим, что пределы, существующие внутри области D^+ и снаружи области D^-, являются непрерывными функциями. Следовательно, можно сделать вывод, что $\Phi(z)$ как кусочно-аналитическая, так и кусочно-непрерывная функция.

Обобщая вышеупомянутую информацию: различие с классической теорией проявляется в том, что мы наблюдаем предельные переходы.

Выделим важные свойства интеграла типа Коши.

Свойство: *Кроме точек контура Γ функция $\Phi(z)$ будет аналитической всюду на комплексной плоскости.*

Аналитичность $\Phi(z)$ можно доказать с помощью дифференцирования по переменной z. В более общем случае имеет место быть следующая теорема.

Ф. Д. Гахов публикует следующую **теорему:** «*Пусть Γ, которая является гладким замкнутым или незамкнутым контуром, а также непрерывную по переменной $\tau \in \Gamma$ функцию $f(\tau, z)$, являющуюся аналитической по z в области D для любого значения $\tau \in \Gamma$ и ограниченную постоянной M при всех $\tau \in \Gamma$ и $z \in D$. Тогда функция*

$$F(z) = \int_\Gamma f(\tau, z) d\tau, \tag{1.3}$$

аналитична по переменной z в области аналитичности $f(\tau, z)$»[3].

Значения z, в которых $f(\tau, z)$ не аналитична будут являться *особыми точками*. А наша подынтегральная функция в интеграле (1.2) перестает быть аналитической относительно z на линии интегрирования Γ. Поэтому особой линией для функции $\Phi(z)$ будет являться линия интегрирования Γ. Можно сделать вывод, что когда Γ является незамкнутым контуром, то функция $\Phi(z)$ аналитична во всей плоскости за исключением линии Γ. Рассмотрим случай, когда Γ является замкнутым контуром, который делит плоскость на области D^+ и D^-. В таком случае из функции $\Phi(z)$ мы получаем самостоятельные функции: $\Phi^+(z)$, inD^+ и $\Phi^-(z)$, $\in D^-$. Стоит заметить, что функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ аналитически не единое целое. Соответственно, заданную функцию $\Phi(z)$, определяемую как $\Phi^+(z)$, inD^+ и $\Phi^-(z)$, $\in D^-$, будем называть *кусочно-аналитической функцией.*

Свойство: *На бесконечности интеграл типа Коши $\Phi(z)$ равен нулю.*

□ Разложим функцию $\Phi(z)$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$ в окрестности ∞. В соответствии с классической теорией получим следующее равенство:

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \ldots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \ldots.$$

Умножение этого разложения на $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$ и последующее почленное интегрирование приводит к следующему:

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}.$$

Получаем, что интеграл типа Коши на самом деле равен нулю на бесконечности. ■

Положим, что $\varphi(t)$ является функцией комплексной переменной t, заданная на некотором множестве E значений t.

Определение 1.2. *Пусть $\varphi(t) \quad \in$ условию H на множестве E, если $\forall t_1, t_2$ переменной t на множестве E*

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le C|t_2 - t_1|^\mu, \tag{1.4}$$

где C и μ являются положительными числами: C будет постоянной Гёльдера, а μ - показателем Гёльдера.

Значения постоянной особого интереса не представляют, что нельзя сказать про показатель Гёльдера μ. Далее разберем разные случае показателя Гёльдера.

1. Пусть $\mu > 1$, тогда если разделить неравенство (1.4) на множитель $|t_2 - t_1|$ получим

$$\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \le C|t_2 - t_1|^{\mu - 1}.$$

Если $|t_1 - t_2| = 0$, то производная функции $\varphi'(t) \equiv 0$. Производная функции равна нулю, если функция является константой.

2. Пусть $\mu = 0$, тогда

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le C.$$

Такая оценка не интересна.

3. Пусть $\mu < 0$, тогда

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le \frac{C}{|t_2 - t_1|^\mu}.$$

Здесь нет ограниченности, значит, этот оценка не представляет интереса.

Получается, что допустимые значения для показателя Гёльдера: $0 < \mu \le 1$. Функции многих переменных также удовлетворяют условию H.

Рассмотрим функцию двух переменных, удовлетворяющую условию H как простейший случай. Для любых (t_1, t_2) и (τ_1, τ_2) из заданных множеств, функция $\varphi(t,\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t_2,\tau_2) - \varphi(t_1,\tau_1)| < A|t_2 - t_1|^{\alpha} + B|\tau_2 - \tau_1|^{\beta},$$

где A и B– положительные постоянные, а $0 < \alpha, \beta \leq 1$.

Выбирая минимум из α и β в качестве показателя Гёльдера μ, можно определить постоянную C так, чтобы выполнялось:

$$|\varphi(t_2,\tau_2) - \varphi(t_1,\tau_1)| < C\big[|t_2 - t_1|^{\mu} + |\tau_2 - \tau_1|^{\mu}\big].$$

Рассмотрим случай, когда точка z в формуле (1.2) лежит на контуре Г. Запишем формулу:

$$\Phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0}d\tau.$$

Интеграл в правой части равенства не представляет особого значения с обычной точки зрения. Однако, существует широкий класс функций $\varphi(\tau)$, для которого интеграл имеет смысл.

Определение 1.3. *Главное значение сингулярного интеграла*

$$\int\limits_a^b \frac{d\tau}{\tau - \tau_0}$$

называется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{\tau-\varepsilon}\frac{d\tau}{\tau-\tau_0} + \int\limits_{\tau+\varepsilon}^{b}\frac{d\tau}{\tau-\tau_0}\right],$$

т.е. как предел.

Посмотрим, как ведет себя интеграл типа Коши при приближении к гладкому или кусочно-гладкому контуру интегрирования Г.

Для произвольной точки τ_0 контура Г и для функции $\varphi(\tau)$, удовлетворяющей условию H, определим вспомогательную функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau - z}d\tau.$$

Основная лемма: *При переходе через точку контура $z = \tau_0$:*

$$\lim_{z\to t}\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau - t}d\tau = \psi(t),$$

т. е. функция $\psi(z)$ ведет себя как непрерывная.

Важный вопрос в этой теме – предельные значения интеграла на контуре Г.

Пусть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Если плотность $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию H на гладкой части контура Г, то функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на эту часть, то ее предельные значения могут быть выражены по формулам Сохоцкого – Племеля через плотность интеграла $\varphi(t)$ и сингулярный интеграл $\Phi(t)$.

Рассмотрим контур Г, который может быть замкнутым или незамкнутым. В случае незамкнутого контура, мы можем дополнить его какой-либо кривой до замкнутого контура, положив значение функции $\varphi(\tau)$ на этой кривой равным нулю.

Для изучения предельных значений рассмотрим «$\Phi(z)$ в точке τ_0 контура функцию $\psi(z)$, в которой обозначает через $\Phi^+(t)$ и $\psi^+(t)$ предельные значения аналитических функций $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ при приближении точки z изнутри Г к точке t контура, а через $\Phi^-(t)$ и $\psi^-(t)$ предельные значения при приближении точки z снаружи Г к точке t. Найдем связь между $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\Phi(t)$, $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$.

Пользуясь основной леммой, получаем, что функция $\psi(t)$ непрерывна, следовательно, правые части полученных равенств совпадают, т. е.

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Тогда получим:

$$\begin{cases}\Phi^+(t) = \dfrac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t),\\ \Phi^-(t) = -\dfrac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t).\end{cases} \tag{1.5}$$

Таким образом, граничные значения функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ находятся через плотность интеграла $\varphi(t)$ и особый интеграл $\Phi(t)$ в смысле главного значения.

Вычитая и складывая формулы (1.5), получим:

$$\begin{cases}\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),\\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2\Phi(t).\end{cases} \tag{1.6}$$

3. Некоторые краевые задачи. Пусть здесь и далее $\Gamma-$ это разрез вдоль отрезка $[-u;u]$ действительной оси, $\Gamma = |x| \le u,\ y = 0$.

Задача о скачке: Найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$ с линией разрыва Γ, граничные значения $\Phi(z)$ которой на линии Γ при приближении слева и справа удовлетворяют следующему равенству:

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \phi(x), \tag{2.1}$$

где $|x| < u$ и $\phi(x)$ - функция, которая удовлетворяет условию H.

Решение: По свойству интеграла типа Коши задача (2.1) может иметь следующее решение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{2.2}$$

Функции, удовлетворяющие условию $\Phi^{\pm}(\infty) = 0$ имеют единственное решение, которое удовлетворяет (2.2).

Если же считать $\Phi^{\pm}(\infty) \neq 0$, то решение задачи можно представить в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ - комплексное число, которое определяется условием на бесконечности.

Вторая задача: Найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$, которая имеет разрыв на $\Gamma \in [-u;u]$ и удовлетворяет на Γ условию:

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = g(x), \tag{2.3}$$

где функция $g(x) \in \Gamma$ удовлетворяет условию H.

Решение: Пусть $X(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - u^2}}$. Будем под функцией $X(z)$ подразумевать определенную ветвь, которая аналитична во всей плоскости вне контура Γ.

Пусть функция $X(z)$ при больших z ведет себя как $\dfrac{1}{z}$. Тогда

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{u^2}{2z^3} + \ldots$$

Тогда для функции $\sqrt{z^2 - u^2}$ на действительной оси имеем три решения:

1) при $x \le -u,\ y = 0$ функция $\sqrt{z^2 - u^2} = -\sqrt{x^2 - u^2}$;

2) при $|x| \le u,\ y = \pm 0$ функция $\sqrt{z^2 - u^2} = \pm i\sqrt{u^2 - x^2}$;

3) при $x \ge u,\ y = 0$ функция $\sqrt{z^2 - u^2} = \sqrt{x^2 - u^2}$.

А граничные значения на контуре Γ функции $X(z)$ будут следующие:

$$X^{+}(x) = \frac{1}{i\sqrt{u^2 - x^2}};$$

$$X^{-}(x) = -\frac{1}{i\sqrt{u^2 - x^2}}.$$

Отметим, что функция $X(z)$ меняет свой знак при пересечении контура Γ и

$$X^{+}(x) + X^{-}(x) = 0$$

или

$$\frac{X^{+}(x)}{X^{-}(x)} = -1.$$

Пользуясь этим фактом и условием (2.3), получим:

$$\Phi^{+}(x) - \frac{X^{+}(x)}{X^{-}(x)}\Phi^{-}(x) = g(x), \quad |x| < u.$$

Разделим наше равенство на $X^{+}(z)$, тогда получим

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{X^{+}(x)} - \frac{\Phi^{-}(x)}{X^{-}(x)} = \frac{g(x)}{X^{+}(x)}.$$

Итак, мы свели данную задачу к задаче о скачке для функции $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$.

Воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau - z)}d\tau + \mathbb{C}.$$

Тогда окончательное решение второй задачи следующее:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - x^2}}\left[\int_{-u}^{u} \frac{\sqrt{u^2 - \tau^2}}{\tau - z}g(\tau)d\tau - 2\pi i\mathbb{C}\right],$$

где $\mathbb{C}$ - комплексная постоянная.

4. Заключение. Для написания работы была изучена литература по теме: «Интеграл типа Коши». Информация обобщена и систематизирована. Решены некоторые краевые задачи с использованием аппарата интеграла типа Коши.

Благодарность. *Автор выражает благодарность научному руководителю Черновой Ольге Викторовне за помощь в выборе тематики исследования, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.*

Список литературы

1. Васильев В. Б. 2016. Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе / В. Б. Васильев. - Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – Т. 16. – № 3. – С. 3–14.
2. Волынский Б. А. 1960. Модели для решения краевых задач / Б. А. Волынский, В. Е. Бухман. – М.: Физматлит, – 452.
3. Гахов Ф. Д. 1958. Краевые задачи: монография / Ф. Д. Гахов. – М.: Физматлит, 543.
4. Глушак А. В. 2020. Дифференциальное исчисление и дифференциальные уравнения : методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям / А. В. Глушак, О. А. Тарасова. – НИУ БелГУ. – Белгород : ИД БелГУ, 36.
5. Краснов М. Л. 2003. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 208.
6. Кудряшова Н. Ю. 2018. Граничные интегральные уравнения: учеб. пособие / Н. Ю. Кудряшова, Т. В. Грунина. – Пенза: Изд-во ПГУ, 72.
7. Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 407.
8. Лаврентьев М. А. 1973. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 749.
9. Магнарадзе Л. Г. 1947. Об одном обобщении теоремы Племеля-Привалова / Л. Г. Магнарадзе // Сообщения АН ГССР. – Т. – № 8. – С. 509–516.
10. Михлин С. Г. 1994. Интегральные уравнения в теории упругости: книга / С. Г. Михлин, Н. Ф. Морозов, М. В. Паукшто. – СПб.: СПбГУ, – 271.
11. Михлин С. Г. 1948. Сингулярные интегральные уравнения / С. Г. Михлин // Успехи математических наук. – М. – № 3. – С. 29–112.
12. Мусхелишвили Н. И. 1962. Сингулярные интегральные уравнения: монография / Н. И. Мусхелишвили. – 2-е изд. – М.: Наука, – 600.
13. Петрова В. Е. 2003. Применение интегралов типа Коши при решении краевых задач: учебно-методическое пособие / В. Е. Петрова. – В.: ВГУ, – 44.
14. Полунин В. А. 2011. Трехмерный аналог интеграла типа Коши / В.А. Полунин, А.П. Солдатов // НИУ БелГУ, Дифференциальные уравнения. – Т.47, №3. – С. 366–375.
15. Попов С. В. 2016. О поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и его приложение в краевых задачах для параболических уравнений / С. В. Попов. – Якутск: Математические заметки СВФУ. Том 23, № 2, 18.
16. Привалов И. И. 1950. Граничные свойства аналитических функций: книга / И. И. Привалов. – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 336.
17. Ситник С. М. 2000. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского / С. М. Ситник // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 9, СамГТУ. – С. 37 – 45.
18. Смирнов В. И. 2010. Курс высшей математики. Том III, часть 2: учебная литература для вузов / В. И. Смирнов; науч. ред. Е. А. Гринина. – СПб.: БХВ-Петербург, 816.
19. Солдатов А. П. 1993. Обобщенный интеграл типа Коши и сингулярный интеграл в пространстве Гёльдера с весом / А. П. Солдатов // Докл. РАН. – Т. 330. – № 2. – С. 164 – 166.
20. Солдатов А. П. 2020. О задаче Шварца для системы Моисила – Теодореско / А. П. Солдатов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – Т. 188. – С. 3–13.
21. Сохоцкий Ю. В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды: монография / Ю. В. Сохоцкий. – СПб.: СПб ун-т.
22. Хведелидзе Б. В. 1956. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения / Б. В. Хведелидзе // Труды Тбил. матем. ин-та. – Т. – № 23. – С. 29–112.
23. Хведелидзе Б. В. 1975. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной / Б.В. Хведелидзе // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. – Т. 7. – С. 5–162.
24. Челидзе В. Г. 1978. Интеграл типа Коши / В. Г. Челидзе, А. Г. Джваршейшвили // Изв. вузов. Матем. – № 6. – С. 117–128.

25. Чернова О. В. 2019. Краевые задачи для эллиптических систем первого порядка на плоскости : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / О. В. Чернова. – Белгород, 103.
26. Чернова О. В. 2018. Обобщенный оператор Векуа-Помпейю / О. В. Чернова // Научные ведомости БелГУ. – Т.50. – №1. – С. 40 – 46.
27. Harnack A. 1885. Beitrage zur Theorie des Cauchy'schen Integrales / A. Harnack. – Berlin: Classe, P. 379–398.
28. Plemelj J. 1908. Ein Erganzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung nalytischer Funktionen, Randwerte betreffend / J. Plemelj. – Mon.: Math. Phys. – P. 205–210.

Поступила в редакцию 29.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Аверина Анастасия Дмитриевна – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 1316728@bsu.edu.ru

РУКОВОДИТЕЛЬ

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: Chernova_Olga@bsu.edu.ru