Студенческий математический журнал, 2023 С. 52–68.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ МЕМБРАНЫ

А. О. Терещенко

E-mail: 1247961@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной статье исследуется решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания плоской мембраны. Рассматривается метод, основанный на комбинации аналитических и численных подходов, для решения этих уравнений. Применяется метод конечных разностей для аппроксимации дифференциальных операторов и численного интегрирования для получения численного решения. Аналитический подход основан на разложении решения в бесконечный ряд Фурье и нахождении коэффициентов этого ряда. Этот метод может быть полезен для моделирования и анализа колебаний плоских мембран в различных приложениях, таких как акустическая и световая техника.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колебания, плоская мембрана, математическое моделирование, решение уравнений, подвижные граничные условия, собственные значения, собственные функции, моделирование колебаний, форма мембраны, граничные условия, резонансные частоты, режимы колебаний, численное моделирование

Для цитирования: Терещенко А. О. 2023. Решение дифференциальных уравнений колебаний плоской мембраны. Студенческий математический журнал. 2023: 52–68.

---

1. Введение. Современный мир переживает быстрый темп научно-технического прогресса, который приводит к увеличению требований к производительности и точности различных технических устройств. Важным элементом таких устройств являются колебания плоских мембран, используемых в резонансных датчиках, звуковых колонках, музыкальных инструментах и других устройствах.

Решение дифференциальных уравнений колебаний плоской мембраны - актуальная задача в настоящее время. Она включает в себя различные аспекты, такие как анализ свойств мембраны, построение математических моделей, разработка методов решения уравнений колебаний с помощью компьютерных технологий и т.д.

Новые открытия в этой области связаны с именами А. Н. Боголюбова [1], В. С. Владимирова [2], С. Л. Соболева [3], С. П. Тимошенко [4], А. Н. Тихонова [5] и других.

2. Уравнение колебания струны. Рассмотрим вопрос об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными, который является одним из наиболее сложных и обширных направлений анализа. В этой статье мы ограничимся основными задачами из этой области, начиная с определения волнового уравнения в трех измерениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

Здесь Δu - оператор Лапласа, который можно записать как $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$. И где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, T_0 - равномерное натяжение струны, а ρ - плотность струны.

Допустим, что функция u не будет зависеть от переменных y и z, т.е. ее значение во всех точках любой плоскости, перпендикулярной оси OX, тождественно. Таким образом, волновое уравнение принимает форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это уравнение описывает плоскую волну. Оно также возникает, если мы рассматриваем малые поперечные колебания тонкой натянутой струны.

Под тонкой струной понимается нить, которая свободно изгибается. Изначально она находится в состоянии равновесия, направленном вдоль оси OX под действием сильного натяжения T_0. Мы будем рассматривать только поперечные колебания, когда точки струны движутся перпендикулярно оси OX. Смещение точек струны, которое является функцией двух независимых переменных x и t, обозначим через u.

Рассмотрим элемент струны MM', занимающий положение NN' при равновесии, и острый угол α, образованный направлением касательной к струне с осью OX. При этом мы будем пренебрегать малыми деформациями квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ и } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Предположим, что на участок струны, перпендикулярный оси OX и длиной в один метр, действует сила F. Этот участок обозначим как MM'. На этот участок действуют три силы: натяжение в точке M', направленное по касательной струне и образующее острый угол с осью OX, натяжение в точке M, направленное по касательной струне и образующее тупой угол с осью OX, а также сила Fdx, направленная по оси u. Поскольку деформации малы, оба натяжения равны по величине и равны T_0. Предположим, что система находится в равновесии при действии силы F. Проецирование на ось u приводит к условию равновесия, которое описывается следующим образом:

$$T_0 \sin\alpha' - T_0 \sin\alpha + Fdx = 0,$$

где α'–значение упомянутого угла α в точке M', т. е.

$$\sin\alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}, \quad \sin\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} \tag{1}$$

и, следовательно,

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right] + Fdx = 0. \tag{2}$$

Обращая внимание на выражение в квадратных скобках, можно заметить разницу, отражающую изменение функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ с учетом изменения аргумента x на dx. Если мы заменим приращение на дифференциал, то получим следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

Применим замену из предыдущего шага к формуле (2). Сократив на dx, мы получим уравнение равновесия струны:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = 0 \qquad (3)$$

Для получения уравнения движения, основанного на принципе Даламбера, нужно учесть не только внешние силы, но и силу инерции. В данном случае, скорость точки M является производной функции u по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$, а ускорение - второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Сила инерции, действующая на элемент $\overrightarrow{MM'}$, направлена противоположно вектору ускорения и равна произведению ускорения на массу: $-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx$.

Допустим, что линейная плотность струны равна ρ, т.е. ее масса на единицу длины. Тогда сила инерции, действующая на единичную длину струны, может быть выражена через производную второго порядка по времени: $-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. При этом нужно учитывать, что значение ρ предполагается постоянным.

Таким образом, для получения уравнения движения мы можем заменить в уравнении (3) силу F на $F - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, что приведет к следующему выражению:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$$

Если мы разделим обе части на ρ и обозначим $\frac{T_0}{\rho} = a^2$ и $\frac{F}{\rho} = f$, то мы получим уравнение вынужденных поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad (5)$$

Если на струну не действует внешняя сила ($f = 0$), то уравнение, описывающее ее колебания, называется уравнением свободных колебаний.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Пусть в точке C струны действует внешняя сила P. Можно рассмотреть граничный случай, когда сила P действует на элемент длиной ε, который стремится к нулю. В этом случае, произведение величины силы на ε стремится к ненулевому значению при $\varepsilon \to 0$. Вместо этого, можно применить уравнение (2) к элементу $\overline{MM'}$, находящемуся возле точки C, заменив Fdx на P. Это является альтернативным подходом, который позволяет не учитывать силы инерции $\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx\right)$ из-за того, что размеры элемента стремятся к нулю.

Можно предположить, что концы элемента приближаются к точке C. При этом, предельные значения сдвига u и производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ находящиеся слева и справа от точки C могут быть обозначены как:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\partial u}{\partial x}$$

соответственно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-$$

мы получаем в пределе из уравнения (2)

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right] = -P. \tag{7}$$

Заметим, что в точке C, где сосредоточена сила струны, происходит образование угловой точки, где касательные направления слева и справа различны.

Одно уравнение движения (5) недостаточно для полного описания динамики струны. Необходимо задать начальное состояние струны при $t = 0$, то есть положение точек u и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$, которые являются известными функциями от x:

$$u|\, t = 0 = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|\, t = 0 = \varphi_1(x) \tag{8}$$

Эти начальные условия должны быть удовлетворены искомой функцией u при $t = 0$.

В теории возможно рассмотрение бесконечной струны, для которой достаточно только уравнения (5) и начальных условий (8), причем функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть заданы на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Этот случай соответствует рассмотрению плоских волн в безграничном пространстве. Полученные результаты для бесконечной струны позволяют представить распространение возмущений в ограниченной струне до момента, когда отраженные от концов струны возмущения достигнут рассматриваемой точки.

При ограничении струны с одной или двух сторон точками $x = 0$ и $x = l$, необходимо учитывать, что происходит на ее концах. Допустим, что конец струны $x = 0$ закреплен. В этом случае необходимо задать условие:

$$u|_{x=0} = 0 \tag{9}$$

что означает, что в точке $x = 0$ амплитуда колебаний равна нулю.

Если конец струны $x = l$ также закреплен, то мы должны также учитывать условие:

$$u|_{x=l} = 0, \tag{9_1}$$

и эти условия должны быть выполнены в любой момент времени.

Однако, концы струны могут быть свободными и двигаться заданным образом. В этом случае координаты этих точек на струне должны быть заданы функциями времени, то есть мы должны положить:

$$u|\, x = 0 = \chi_1(t), \quad u|\, x = l = \chi_2(t) \tag{10}$$

что означает, что амплитуды колебаний в конечных точках струны зависят от времени и заданы функциями $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$.

Каждое уравнение движения в физике имеет свои дополнительные условия, которые играют важную роль в решении конкретных задач. Одним из таких условий является предельное условие.

Если струна ограничена с одной или обеих сторон, то каждый ее конец должен удовлетворять предельному условию. Поэтому, для нахождения именно того решения, которое соответствует заданным начальным и предельным условиям, необходимо учитывать все дополнительные условия в задаче, а не только уравнение движения. Ведь только учитывая все условия, можно найти искомое решение, которое соответствует реальным условиям физической задачи.

3. Решение Даламбера. При рассмотрении свободных колебаний бесконечной струны ключевым условием является уравнение (6), которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^9} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^9}.$$

С учетом начальных условий (8), где функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ определены на промежутке от отрицательной до положительной бесконечности ввиду неограниченности струны.

Чтобы удовлетворить условиям (8), мы можем получить общее решение уравнения (6), перейдя к новым независимым переменным.

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

$$x = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad t = \frac{1}{2a}(\eta - \xi).$$

Допустим, что функция u определяется через переменные x и t через ξ и η. Чтобы проще вычислить производные от u по старым переменным, мы можем использовать правило дифференцирования сложной функции и выразить их через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

Применяя эти же формулы еще раз, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 ut}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

и уравнение (6) оказывается равносильным следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{11}$$

Переписав уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$$

заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ не зависит от η, т. е. является функцией только от ξ. Положив

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \theta(\xi)$$

получаем, интегрируя,

$$u = \int \theta(\xi) d\xi + \theta_2(\eta)$$

Функция $\theta_2(\eta)$ не определена и может принимать любые значения в зависимости от параметра η. "Постоянная"при интегрировании по ξ может быть функцией от η, поскольку она может изменять свое значение в зависимости от параметра η. Первое слагаемое в уравнении также является произвольной функцией от ξ, так как $\theta_1(\eta)$ определена как функция от ξ и может быть записана как $\theta_1(\xi)$.

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$$

Выражая решение в старых переменных (x, t), получаем:

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{12}$$

Решение Даламбера является наиболее общим решением уравнения (6), и включает в себя две произвольные функции θ_1 и θ_2. Определение этих функций возможно с помощью начальных условий (8).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left[-\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)\right]$$

Кроме того, уравнения (12) можно использовать для получения следующего выражения:

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x), -\theta_1'(x) + \theta_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{a} \tag{13}$$

Также можно записать следующее выражение, проинтегрировав и поменяв знак:

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z) dz + C$$

Подставив $x = 0$, мы можем определить произвольную постоянную C:

$$C = \theta_1(0) - \theta_2(0)$$

Для удобства можно считать, что $C = 0$, не ограничивая общности, таким образом:

$$\theta_1(0) - \theta_2(0) = 0 \tag{14}$$

Если бы $C \neq 0$, мы могли бы ввести новые функции вместо $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ следующим образом:

$$\theta_1(x) - \frac{C}{2}, \quad \theta_2(x) + \frac{C}{2}$$

Мы могли бы, не меняя уравнения (13), удовлетворить также уравнению (14), если бы выбрали другие функции вместо $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ при условии $C \neq 0$.

Таким образом, мы получаем:

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x), \quad 0_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z) dz. \tag{15}$$

Из этих уравнений мы легко можем определить функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z) dz, \quad \theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z) dz. \tag{16}$$

Подставив найденные выражения в уравнение (12), получаем:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \varphi_1(z)dz + \frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \varphi_1(z)dz,$$

Или, окончательно, получаем:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)dz. \tag{17}$$

Из формулы (17) следует, что решение задачи будет дважды непрерывно дифференцируемым, если функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а функция $\varphi_1(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi_1'(x)$ на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Однако в некоторых случаях начальные условия могут быть заданы функциями, которые не удовлетворяют этим условиям. Например, если струна в начальный момент имеет форму ломаной линии, то функция $\varphi(x)$ не будет иметь определенной производной в вершине ломаной. В таких случаях можно применить формулу (17) для нахождения решения задачи, хотя функция $u(x,t)$ может не всюду иметь непрерывные производные до второго порядка. В этом случае решение задачи называется обобщенным.

4. Поперечные колебания мембран. До этого момента мы изучили волновые уравнения в открытом пространстве без наличия границ, используя дифференциальное уравнение и начальные условия. Однако, когда мы сталкиваемся с предельными задачами для волнового уравнения на плоскости или в пространстве в линейном случае, они оказываются намного более сложными. Мы рассмотрим две предельные задачи на плоскости, когда основными областями являются прямоугольник или круг. В этих случаях мы можем интерпретировать волновое уравнение на плоскости как уравнение для колебаний мембраны.

В физике мембраной называется тонкая и гибкая плоская поверхность, которая способна только на растяжение, но не изгиб. Если мы закрепим мембрану в плоскости (x, y) с равномерным натяжением T_0 и рассмотрим только движение мембраны вдоль оси Oz, то перемещение точки (x, y) мембраны будет функцией x, y, и t. Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению струны, и записывается как:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial'} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \tag{18}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

ρ обозначает плотность мембраны, а ρf - это внешняя сила или нагрузка, которая действует на мембрану.

Кроме дифференциального уравнения (18), требуется учитывать граничное условие, согласованное с функцией u, на контуре (C) - границе мембраны. Мы рассмотрим случай, когда мембрана закреплена на контуре (C).

$$u = 0 \quad \text{на} \quad (C). \tag{19}$$

Как и в случае со струной, требуется еще задать начальные условия, определяющие смещение и скорость всех точек мембраны в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x,y) \tag{20}$$

5. Прямоугольная мембрана. Изучим свободные колебания мембраны в форме прямоугольника с сторонами, образующим контур:

$$x = 0, x = l, y = 0, y = m \tag{21}$$

Рассмотрим координатную плоскость (x, y). Для удобства решения уравнения мы оставим без учета внешнее воздействие, то есть будем считать, что функция f равна нулю. Наша задача - получить корректное решение данного уравнения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{22}$$

которое полностью соответствует условиям (19) и (20). Для нахождения частного решения уравнения (22) применяется метод стоячих волн (теоремы Фурье), который заключается в его представлении в следующей форме:

$$(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)U(x,y) \tag{23}$$

что дает нам

$$-\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)U(x,y) =$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t),$$

откуда, полагая

$$\frac{\omega^2}{a^2} = k^2 \tag{24}$$

Методом математических преобразований и алгебраических операций мы можем получить уравнение, описывающее функцию U.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$$

Для нахождения частного решения данного уравнения, мы можем искать его в виде:

$$U(x, y) = X(x)Y(y) \tag{25}$$

что дает нам

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k^2 X(x)Y(y) = 0,$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + k^2 Y(y)}{Y(y)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 - пока неопределенная постоянная.

Таким образом, в нашем распоряжении находятся два уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0 \tag{26}$$

где

$$\mu^2 = k^2 - \lambda^2, \mu^2 + \lambda^2 = k^2$$

Найденные уравнения (26) являются важным инструментом для определения общего вида функций $X(x)$ и $Y(y)$. Они позволяют точно описать их особенности и свойства в зависимости от значений параметров системы.

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x, \quad Y(y) = C_3 \sin \mu x + C_4 \cos \mu x.$$

Из условия

$$u = 0 \text{ на } (C)$$

получаем

$$U(x, y) = 0 \text{ на } (C),$$

а это последнее условие, в свою очередь, распадается на следующие условия:

$$X(0) = 0, X(l) = 0, Y(0) = 0, Y(m) = 0$$

следует однозначно, что C_2 и C_4 равны нулю. Также, если мы отбросим константы C_1 и C_8, которые не равны нулю, то окажется, что:

$$X(x) = \sin \lambda x, \quad Y(y) = \sin \mu y \tag{27}$$

причем

$$\sin \lambda l = 0, \quad \sin \mu m = 0. \tag{28}$$

Согласно формулам (28), можно сделать вывод, что λ и μ обладают бесконечным числом значений

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma, \ldots ; \mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau, \ldots ; \lambda_\sigma = \frac{\sigma\pi}{l}, \mu_\tau = \frac{\tau\pi}{m}. \tag{29}$$

Выбрав произвольные значения из последовательностей (29) для λ и μ, мы сможем определить конкретное значение постоянной k^2.

$$k^2_{\sigma,\tau} = \lambda^2_\sigma + \mu^2_\tau = \pi^2 \left(\frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right),$$

Используя найденное значение постоянной k^2, мы сможем найти соответствующее значение частоты ω с помощью формулы (24):

$$\omega^2_{\sigma,\tau} = a^2 k^2_{\sigma,\tau} = a^2 \pi^2 \left(\frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right). \tag{30}$$

Путем подстановки λ_σ вместо λ и μ_τ вместо μ в формуле (23) и обозначения соответствующих значений α и β как $\alpha_{\sigma,\tau}$ и $\beta_{\sigma,\tau}$, мы можем получить бесконечное множество решений уравнения (22), удовлетворяющих ограничению (19). Они могут быть представлены в виде:

$$(\alpha_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t + \beta_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

Следовательно, мы получаем бесконечное множество собственных (свободных) гармонических колебаний мембраны, что аналогично колебаниям, происходящим на струне.

Константы α и β зависят от начальных условий, их значения можно найти, подставив $t = 0$ в формулы, полученные из предельного условия (19).

$$u = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \left(\alpha_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t + \beta_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t\right) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \omega_{\sigma,\tau} \left(\beta_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t - \alpha_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t\right) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

получим на основании (20)

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x,y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \alpha_{\sigma,\tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}^{\infty} = \varphi_2(x,y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \beta_{\sigma,\tau}\omega_{\sigma,\tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m}.$$

Фактически, формулы, полученные из ограничения (19), являются разложениями функций φ_1 и φ_2 в двойные ряды Фурье. Коэффициенты α и β можно легко найти, используя следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_{\sigma,\tau} &= \tfrac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_1(\xi,\zeta) \sin \tfrac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \tfrac{\tau\pi\eta}{m} d\xi d\eta, \\ \omega_{\sigma,\tau}\beta_{\sigma,\tau} &= \tfrac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_2(\xi,\eta) \sin \tfrac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \tfrac{\tau\pi\eta}{m} d\xi d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Решая поставленную задачу, мы можем использовать полученные формулы для определения коэффициентов α и β.

В отличие от струны, для каждой частоты собственных колебаний мембраны может существовать несколько форм мембраны с разным расположением узловых линий, где амплитуда колебаний равна нулю. Это можно проиллюстрировать на примере квадратной мембраны со стороной $l = m = r$. В этом случае частота $\omega_{\sigma,\tau}$ определяется с помощью формулы:

$$\omega_{\sigma,\tau} = \frac{a\pi}{r}\sqrt{\sigma^2+\tau^2} = \alpha\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \tag{32}$$

Здесь множитель a равен $a = \frac{a\pi}{r}$ и не зависит от σ и τ. Подставляя $\sigma = \tau = 1$, мы получаем основной тон u_{11} мембраны с частотой $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$.

$$u_{11} = N_1 \sin\left(\omega_{11} t + \varphi_{11}\right) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}$$

Следует отметить, что на основном тоне u_{11} у мембраны не имеется узловых линий внутри. Положим затем:

$$\sigma = 1, \tau = 2 \text{ или } \sigma = 2, \tau = 1,$$

имеем два других тона одинаковой частоты

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5}$$

именно

$$u_{12} = N_{12} \sin\left(\omega_{12} t + \varphi_{12}\right) \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r}$$

$$u_{21} = N_{21} \sin\left(\omega_{21} t + \varphi_{21}\right) \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}$$

Для этих простейших колебаний, прямые линии, на которых амплитуда колебаний равна нулю, определяются следующим образом:

$$y = \frac{r}{2} \text{ или } x = \frac{r}{2}.$$

Важно отметить, что помимо колебаний u_{12} и u_{21} на частоте ω_{12} существует бесконечное число других колебаний, которые являются линейной комбинацией u_{12} и u_{21}. Если мы положим $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$ для упрощения, мы можем получить колебание, которое выглядит так:

$$\sin \omega t \left[N_1 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r} + N_2 \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}\right]$$

Здесь стоит отметить, что $\omega = \omega_{12} = \omega_{21}$, а также $N_1 = N_{12}$ и $N_2 = N_{21}$. При $N_1 = N_2$ узловые линии определяются из уравнения:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r} + \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r} \left(\cos \frac{\pi x}{r} + \cos \frac{\pi y}{r}\right), \end{aligned}$$

что дает узловую линию

$$x + y = r.$$

Если же $N_2 = -N_1$, узловая линия может быть найдена точно таким же образом: $x - y = 0$.

Однако, если $N_2 \neq \pm N_1$ и $N_1, N_2 \neq 0$, то мы можем получить более сложные узловые линии на той же частоте. Все они имеют уравнения, которые подобны следующему:

$$N_2 \cos \frac{\pi x}{r} + N_1 \cos \frac{\pi y}{r} = 0$$

Полагая теперь

$$\sigma = 2, \tau = 2$$

получаем единственный тон частоты

$$\omega_{22} = \alpha\sqrt{8},$$

узловые линии которого суть:

$$x = \frac{r}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{r}{2}.$$

Следующий случай:

$$\sigma = 1, \tau = 3, \sigma = 3, \tau = 1$$

с частотой $\omega_{18} = \omega_{81} = \alpha\sqrt{10}$, который приводит к возникновению бесконечного множества колебаний одной и той же частоты. Все эти фигуры являются хладниевыми фигурами, которые хорошо известны в области акустики.

Анализируя вынужденные колебания мембраны, можно использовать подход, аналогичный вынужденным колебаниям струны. Однако здесь имеется отличие: внешняя сила $f(x, y, t)$ разлагается в двойной ряд Фурье, а не в простой ряд.

6. Круглая мембрана. Рассмотрим круглую мембрану, для которой мы можем использовать функции Бесселя в качестве базисных функций для ее разложения. Это не только интересный пример математической физики, но и демонстрирует важность использования подобных разложений в решении других задач в этой области науки.

Изучим свободные (или собственные) колебания круглой мембраны, имеющей контур в виде окружности с центром в начале координат радиуса l, при условии, что мембрана не смещается вдоль контура. Для удобства применяем полярные координаты (r, θ) вместо декартовых координат (x, y), чтобы уравнение колебаний имело вид:

$$u|_{r=l} = 0.$$

Аналогично прямоугольной мембране, частные решения уравнения (22) для круглой мембраны будут искаться в следующем виде:

$$(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)U,$$

Теперь мы выражаем функцию U через полярные координаты (r, θ), а не декартовы (x, y), что позволяет нам получить такое же дифференциальное уравнение для функции U.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0 \tag{33}$$

Однако, для приведения уравнения к новым переменным (r, θ) необходимо произвести соответствующие преобразования. Для этого можно выразить оператор Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{34}$$

в полярных координатах и использовать его для преобразования дифференциального уравнения:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

которое, выражается в цилиндрических координатах в виде:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(p\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + p\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]$$

Предположим, что функция U не зависит от координаты z. В таком случае мы можем записать уравнение (34) через полярные координаты. Для удобства дальнейшего изложения, мы будем обозначать длину радиуса-вектора через букву r вместо ρ, а полярный угол - буквой θ вместо φ.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

Перепишем уравнение (33) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^8}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + k^2 U = 0.$$

Для поиска частных решений уравнения (33) используем метод разделения переменных и ищем его в виде произведения:

$$U(r, \theta) = T(\theta) \cdot R(r),$$

что дает

$$T(\theta)\left[R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + k^2 R(r)\right] + \frac{1}{r^2}T''(\theta)R(\boldsymbol{r}) = 0,$$

или

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{r^2 R''(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}R'(\boldsymbol{r}) + k^2 r^2 R(\boldsymbol{r})}{R(\boldsymbol{r})} = -\lambda^2$$

И, в итоге,

$$T''(\theta) + \lambda^2 T(\theta) = 0, \tag{35}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(\boldsymbol{r}) + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{36}$$

Уравнение (35) обладает общим решением вида

$$T(\theta) = C\cos\lambda\theta + D\sin\lambda\theta.$$

Однако функция U должна быть однозначной периодической функцией от θ с периодом 2π, как это требуется по условиям задачи. Это означает, что λ может принимать только целочисленные значения. В таком случае мы ограничимся только положительными значениями λ, то есть $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Соответствующие выражения для функций $T(\theta)$ и $R(r)$ будем обозначать через:

$$T_0(\theta), T_1(\theta), T_2(\theta), \dots, T_n(\theta), \dots; R_0(r), R_1(r), R_2(\boldsymbol{r}), \dots, R_n(\boldsymbol{r}), \dots$$

Таким образом, мы получаем бесконечное множество решений уравнения (22) вида:

$$(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)(C\cos n\theta + D\sin n\theta)R_n(r) \quad (\omega = ak). \tag{37}$$

Функция $R_n(r)$, определенная в уравнении (35), удовлетворяет уравнению (36) при замене λ на n:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R_n(r) = 0 \tag{38}$$

Общее решение уравнения (36) можно записать в виде:

$$R_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 K_n(kr),$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя, а $K_n(x)$ - второе решение уравнения Бесселя, которое обращается в бесконечность при $x = 0$. Тем не менее, так как искомые решения должны быть ограничены при $r = 0$, член с $K_n(kr)$ в предыдущей формуле для $R_n(r)$ должен быть исключен, то есть $C_2 = 0$. Без ограничения общности, можно установить $C_1 = 1$, то есть:

$$R_n(r) = J_n(kr).$$

Из предельного условия следует:

$$u|_{r-l} = 0$$

дает

$$J_n(\dot{k}l) = 0 \tag{41}$$

Полагая $kl = \mu$, мы получаем трансцендентное уравнение, позволяющее найти μ :

$$J_n(\mu) = 0 \tag{42}$$

которое, как доказывается в теории функций Бесселя, имеет бесконечное множество положительных корней.

$$\mu_1^{(n)}, \mu_z^{(n)}, \mu_8^{(n)}, \dots, \mu_m^{(n)}, \dots \tag{43}$$

которым соответствуют значения

$$k_1^{(n)}, k_y^{(n)}, k_s^{(n)}, \dots, k_m^{(n)} = \frac{\mu_m^{(n)}}{l}, \dots \tag{44}$$

параметра k и, в силу (24), значения

$$\omega_{m,n} = ak_m^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots) \tag{45}$$

частоты, обозначенной ω. Применяя приближенную формулу, можно вычислить следующие корни $\mu_m^{(n)}$ с большей точностью.

$$\mu_m^{(n)} = \frac{1}{4}\pi(2n - 1 + 4m) - \frac{4n^2 - 1}{\pi(2n - 1 + 4m)}. \tag{46}$$

С увеличением значения m формула даст более точный результат. Но не будем здесь углубляться в детали ее обоснования.

Для получения частных решений мы можем воспользоваться формулой (37), которая записывает их в следующем виде:

$$\begin{gathered}\left(\omega_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t + \alpha_{m,n}^{(1)}\sin\omega_{m,n}t\right)\cos n\theta\cdot J_n\left(k_m^{(n)}r\right) + \\ + \left(\beta_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t + \beta_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t\right)\sin n\theta\cdot J_n\left(k_m^{(n)}r\right) \\ (m, n = 1, 2, \dots).\end{gathered} \tag{47}$$

Важно отметить, что при $\lambda = 0$ решения уравнения (35) будут представлять собой функцию постоянной величины, а также функцию θ. Однако, второе из этих решений не подходит, поскольку не обладает периодичностью. Вместо этого мы можем использовать первое решение, для которого формула (37) примет вид:

$$\left(\alpha_{m,0}^{(1)} \cos \omega_{m,0} t + \alpha_{m,0}^{(2)} \sin \omega_{m,0} t\right) J_0 \left(k_m^{(0)} r\right)$$

Таким образом, данное решение будет иметь форму, аналогичную (47), при условии $n = 0$. Однако, нам предстоит еще удовлетворить начальным условиям, чтобы получить полное решение.

$$u|_{t=0} = \varphi_1(r,\theta), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(r,\theta). \tag{48}$$

С учетом полученных частных решений, мы можем продолжить к поиску полного решения, удовлетворяющего начальным условиям. Для этого предлагается искать функцию y в виде двойного ряда:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \left(\alpha_{m,n}^{(1)} \cos \omega_{m,n} t + \alpha_{m,n}^{(2)} \sin \omega_{m,n} t\right) \cos n\theta \cdot J_n \left(k_m^{(n)} r\right) +$$
$$+ \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \left(\beta_{m,n}^{(1)} \cos \omega_{m,n} t + \beta_{m,n}^{(2)} \sin \omega_{m,n} t\right) \sin n\theta \cdot J_n \left(k_m^{(n)} r\right).$$

Вычислив

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} \left(\alpha_{m,n}^{(2)} \cos \omega_{m,n} t - \alpha_{m,n}^{(1)} \sin \omega_{m,n} t\right) \cos n\theta \cdot J_n \left(k_m^{(n)} r\right) +$$
$$+ \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} \left(\beta_{m,n}^{(2)} \cos \omega_{m,n} t - \beta_{m,n}^{(1)} \sin \omega_{m,n} t\right) \sin n\theta \cdot J_n \left(k_m^{(n)} r\right)$$

Применив эти формулы при $t = 0$ и учитывая (48), мы можем получить разложение функций $\varphi_1(r,\theta)$ и $\varphi_2(r,\theta)$ в виде двойных рядов следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(r,\theta) &= \textstyle\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \left(a_{m,n}^{(1)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(1)} \sin n\theta\right) J_n \left(k_m^{(n)} r\right), \\ \varphi_2(r,\theta) &= \textstyle\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} \left(\alpha_{m,n}^{(2)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(2)} \sin n\theta\right) J_n \left(k_m^{(n)} r\right). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Выразив функцию $\varphi_1(r,\theta)$ как периодическую функцию от θ и разложив ее в обычный ряд Фурье, мы получаем:

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{\varphi_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n^{(1)} \cos n\theta + \psi_n^{(1)} \sin n\theta\right)$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r,\theta) \cos n\theta d\theta, \psi_n^{(1)} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r,\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{50}$$

Сравнивая данное разложение с первой формулой из (49), мы можем без труда получить:

$$\left.\begin{gathered} \varphi_0^{(1)} = 2 \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,0}^{(1)} J_0 \left(k_m^{(0)} r\right), \quad \varphi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,n}^{(1)} J_n \left(k_m^{(n)} r\right), \\ \psi_n^{(1)} = \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,n}^{(1)} J_n \left(k_m^{(n)} r\right). \end{gathered}\right\} \tag{51}$$

Коэффициенты $\varphi^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ зависят от r их выражения (50). Таким образом, нам предстоит решить задачу разложения данной функции в ряд по функциям $J_n \left(k_m^{(n)} r\right)$ при заданном значении n. Получив эти разложения, мы сможем определить коэффициенты α и β, решив исходную задачу.

Предположим, что функция $f(r)$ может быть разложена в ряд по функциям вида:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left(k_m^{(n)} r\right) \tag{52}$$

Представив, что такое разложение возможно и может быть проинтегрировано почленно, мы можем ограничиться нахождением коэффициентов A_m. Доказав, что функции:

$$J_n \left(k_1^{(n)} r\right), \quad J_n \left(k_2^{(n)} r\right), \ldots, J_n \left(k_m^{(n)} r\right), \ldots$$

можно показать, что данные функции обладают свойством обобщенной ортогональности:

$$\int_0^l J_n\left(k_\alpha^{(n)} r\right) J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) r dr = 0 \text{ при } \sigma \neq \tau. \tag{53}$$

Заметим, что уравнение (38) при замене k^2 на $k_\sigma^{(n)^2}$ и $k_\tau^{(n)^2}$, а также замене $R_n(r)$ на $J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)$ и $J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)$ примет вид:

$$\frac{d^2 J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} + \left(k_\sigma^{(n)^2} - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) = 0,$$
$$\frac{d^2 J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} + \left(k_\tau^{(n)^2} - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) = 0$$

Умножив первое уравнение на $rJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)$, второе на $rJ_n\left(k_s^{(n)} r\right)$, вычтем их друг из друга и проинтегрируем по r от 0 до l, получим:

$$\left(k_\sigma^{(n)^*} - k_\tau^{(n)^2}\right) \int_0^l J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) r dr =$$
$$= \int_0^l \left[\frac{d^2 J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr^2} J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) - \frac{d^2 J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr^2} J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)\right] r dr +$$
$$+ \int_0^l \left[\frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_s^{(n)} r\right) - \frac{dJ_n\left(k_\circ^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)\right] dr.$$

После интегрирования по частям, получим:

$$\int \frac{d^2 J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr^2} J_n\left(k_s^{(n)} r\right) r dr = \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} rJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) -$$
$$- \int \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} \frac{d\left[rJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) \mid\right.}{dr} dr = \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} rJ_n\left(k_o^{(n)} r\right) -$$
$$- \int \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} \frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} r dr - \int \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) dr,$$

и точно так же

$$\int \frac{d^2 J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr^2} J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) r dr = \frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} rJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) -$$
$$- \int \frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} \frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} r dr - \int \frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) dr.$$

Отсюда без труда выводим:

$$\left(k_\sigma^{(n)^2} - k_\tau^{(n)^2}\right) \int_0^l J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) r dr =$$
$$= r\left[\frac{dJ_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) - \frac{dJ_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right)}{dr} J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right)\right]\Bigg|_{r=0^*}^{r=l}$$

Используя определение чисел $k_\sigma^{(n)}$ и $k_\tau^{(n)}$, получим:

$$J_n\left(k_\sigma^{(n)} l\right) = J_n\left(k_\tau^{(n)} l\right) = 0.$$

Следовательно, правая часть данного равенства обращается в нуль при $r = l$, поскольку $\cos(k_\sigma^{(n)} l) - \cos(k_\tau^{(n)} l) = 0$. Кроме того, функции $J_n(x)$ и $J_n'(x)$ конечны при $x = 0$, так что правая часть также обращается в нуль на нижнем пределе $r = 0$. Однако, если $\sigma \neq \tau$ и $k_\sigma^{(n)} \neq k_\tau^{(n)}$, то можем утверждать:

$$\int_0^l J_n\left(k_\sigma^{(n)} r\right) J_n\left(k_\tau^{(n)} r\right) r dr = 0$$

что и требовалось доказать. После доказательства формулы (53) становится очевидным, как найти коэффициенты A_m в разложении функции (52). Для этого мы умножим обе части уравнения (52) на $J_n\left(k_p^{(n)} r\right)$, проинтегрируем по r от 0 до l и воспользуемся формулой (53):

$$\int_0^l f(r) J_n\left(k_p^{(n)} r\right) r dr = A_p \int_0^l J_n^2\left(k_p^{(n)} r\right) r dr.$$

Таким образом, можем сделать вывод, что если предоставленное разложение (52) является возможным и может быть проинтегрировано по частям, то коэффициенты A_m могут быть найдены с использованием формул, которые были получены выше.

$$A_m = \frac{\int_0^l f(r) J_n\left(k_m^{(n)} r\right) r dr}{\int_0^l J_n^2\left(k_m^{(n)} r\right) r dr}$$

С помощью формул (50) и (51) мы можем получить следующие выражения для коэффициентов $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$:

$$a_{m,0}^{(1)} = \frac{1}{2-} \frac{\int_0^l \varphi_0^{(1)} J_0\left(k_m^{(0)} r\right) r dr}{\int_0^l J_n^2\left(k_m^{(0)} r\right) r dr} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \int_0^l J_0^2\left(k_m^{(0)} r\right) r dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r,\theta) J_0\left(k_m^{(0)} r\right) r dr,$$

$$a_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int_0^l J_n^2\left(k_m^{(n)} r\right) r dr - \pi} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r,\theta) \cos n\theta J_n\left(k_m^{(n)} r\right) r dr,$$

$$\beta_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int_0^l J_n^2\left(k_m^{(n)} r\right) r dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l \varphi_1(r,\theta) \sin n\theta J_n\left(k_m^{(n)} r\right) r dr.$$

Аналогичными рассуждениями мы можем определить значения коэффициентов $a^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$. Для этого необходимо заменить φ_1 на φ_2 в предыдущих уравнениях и разделить соответствующие выражения на $\omega_{m,n}$. Как и в случае с прямоугольной мембраной, круглая мембрана также может быть представлена в виде суммы бесконечного множества собственных гармонических колебаний, при этом каждой частоте может соответствовать неограниченное количество различных схем расположения узловых линий.

При использовании метода Фурье для произвольной кривой мы можем выделить только множитель, зависящий от времени, на основании уравнения (23):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$$

Необходимо определить значения параметра k, при которых уравнение имеет решения, отличные от нуля и удовлетворяющие предельному условию (19). Для получения таких решений нужно применить методы, отличные от разделения переменных, и определить их численное значение. Однако не всегда возможно применять метод разделения переменных, поэтому необходимо исследовать уравнение (54) напрямую. Для определения ненулевых решений волнового уравнения в трехмерном пространстве мы можем воспользоваться рядами Фурье по трем переменным x, y и z, а для решения этой задачи на сфере используем функции Бесселя.

7. Теорема единственности. Предлагаем доказать уникальность решения волнового уравнения в бесконечном пространстве при заданной начальной точке и граничных условиях. Для удобства переписи предположим, что скорость распространения волны равна единице и заменим время в уравнении на $a^{-1}t$. Для анализа волновых процессов в трехмерном пространстве рассмотрим волновое уравнение, зависящее от трех независимых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{55}$$

Для начала проведем анализ задачи с единственными начальными условиями, заданными на всей плоскости:

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y). \tag{56}$$

Если для уравнения (55) соответствующим начальным условиям (56) существуют два различных решения u_1 и u_2, то их разность $u_2 - u_1$ также будет являться решением уравнения (55) и однородных начальных условий:

$$u|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{57}$$

Для доказательства данного утверждения необходимо показать, что функция $\boldsymbol{u}$ равна нулю для всех значений (x, y) и для любого $t > 0$. Рассмотрим трехмерное пространство (x, y, t) и выберем произвольную точку $N(x_0, y_0, t_0)$ с $t_0 > 0$. Проведем из этой точки коническую поверхность, которая будет использоваться в качестве вершины:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t - t_0)^2 = 0 \tag{58}$$

Проведем нашу крученую поверхность до того момента, когда она встретится с плоскостью $t = 0$. Затем создадим еще одну плоскость в точке $t = t_1$, где $0 < t_1 < t_0$, чтобы продолжить наш графический анализ. Допустим, что D – трехмерная область, ограниченная боковой поверхностью Γ, которая представляет собой усеченный конус, ограниченный сегментами плоскостей $t = 0$ и $t = t_1$, расположенными внутри конуса. Доказательство следующего тождества является элементарным:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] - \\ &- 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{59}$$

Для доказательства данного выражения проинтегрируем обе его части по области D. Значение интеграла от левой части будет равно нулю, так как функция $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет уравнению (55).

Правую же часть мы можем переписать в виде интеграла по поверхности D с помощью формулы Остроградского:

$$\begin{aligned} \iint \Bigg\{ &\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n, t) - \\ &-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) - 2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\Bigg\}\, ds. \end{aligned} \tag{60}$$

Уравнение (57) требует, чтобы функция $\boldsymbol{u}$ и ее первые производные равнялись нулю на нижнем основании усеченного конуса D, поэтому интеграл (60) по нижнему основанию равен нулю. На верхнем основании (σ), находящемся на плоскости $t = t_1$, мы имеем следующее выражение:

$$\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0 \text{ и } \cos(n, t) = 1.$$

На боковой поверхности Γ конуса, косинусы направляющих нормалей удовлетворяют следующему соотношению:

$$\cos^2(n, t) - \cos^2(n, x) - \cos^2(n, y) = 0,$$

с учетом данного соотношения интеграл (60) по Γ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} J = \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{1}{\cos(n, t)} \Bigg\{ &\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n, x)\right]^2 + \\ &+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n, y)\right]^2\Bigg\}\, ds \end{aligned}$$

и мы получим окончательно

$$J + \int_{(\sigma)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] ds = 0.$$

На поверхности Γ выполняется неравенство $\cos(n, t) > 0$, что означает $J \geqslant 0$. Следовательно,

$$\int_{(0)}\int_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] ds = 0$$

Указанное утверждение означает, что внутри полного конуса с вершиной $N(x_0, y_0, t_0)$ все частные производные первого порядка функции $\boldsymbol{t}$ равны нулю. Это в свою очередь приводит к тому, что функция u не меняется в этой области. На основании этого можно заключить, что в точке N функция u также должна быть равна нулю в соответствии с уравнением (57). Полученное доказательство теоремы единственности применимо и для предельной задачи, связанной с уравнением (55). Предположим, что мы ищем решение уравнения (55) в области B плоскости (x, y) с начальными и предельными условиями, где предельные условия определяются для контура l, расположенного внутри области B. Для решения данной задачи можно построить цилиндр с основанием B и образующими, параллельными оси t. Каждому моменту времени t и точке в области B будет соответствовать определенная точка на поверхности цилиндра. Если начальные условия в области B удовлетворяют условию (57), а на контуре l заданы однородные предельные условия, то теорема единственности также применима в данном случае.

$$u|_l = 0 \tag{61}$$

Покажем, что функция u равна нулю в каждой точке поверхности цилиндра, ограниченной плоскостями $t = 0$ и $t = t_1$, а также боковой поверхностью, которая представляет собой боковую поверхность конуса, построенного на этом цилиндре. Для доказательства используем аналогичные методы, примененные в основной части текста. Рассмотрим конус, вершина которого находится в данной точке N, а боковая поверхность состоит из всех линий, соединяющих точки на окружности в плоскости $t = t_1$ с вершиной конуса. Обозначим этот конус через K. Рассмотрим тело D, ограниченное поверхностью цилиндра и поверхностью конуса, то есть боковой поверхностью цилиндра и боковой поверхностью конуса, расположенной между плоскостями $t = 0$ и $t = t_1$. Проинтегрируем тождество (59) по области D. Аналогичные рассуждения, примененные в основном тексте, позволяют заключить, что если интеграл по боковой поверхности конуса равен нулю, то функция u равна нулю в каждой точке тела D.

Заметим, что подынтегральная функция в интеграле по боковой поверхности конуса совпадает с подынтегральной функцией интеграла (60). Однако на боковой поверхности конуса значение косинуса угла между векторами нормали и касательной равно нулю, а также на этой поверхности производная функции u по времени равна нулю. Это вытекает из граничного условия на окружности, лежащей в плоскости $t = t_1$. Именно это условие определяет, как будет вести себя функция u на боковой поверхности цилиндра в момент перехода к предельному состоянию при $t \to t_1$. Таким образом, на боковой поверхности конуса значение подынтегральной функции в интеграле (60) равно нулю, что влечет за собой равенство функции u нулю в каждой точке тела D. Теорема единственности также справедлива для предельной задачи, в случае, если функция u и ее первые две производные являются непрерывными на всем цилиндре, включая его границу. Такое условие удовлетворяет критериям корректности постановки краевой задачи и обеспечивает единственность решения на всей области D в соответствии с граничными условиями и уравнением колебаний.

8. Применение интеграла Фурье. Рассмотрим уравнение колебаний (волновое уравнение) в линейном случае.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{62}$$

Рассмотрим задачу колебаний (волнового уравнения) для полубесконечной области $x \geqslant 0$ с заданными начальными условиями.

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (x \geqslant 0) \tag{63}$$

и предельным условием

$$u|_{x=0} = 0 \tag{64}$$

Можно продолжить функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, заданные на промежутке $(0, +\infty)$, на промежуток $(-\infty, 0)$, с сохранением их свойств нечетности. Эти продолженные функции могут быть использованы для описания бесконечно продолженных колебаний струны, удовлетворяющих начальным условиям в задаче. Используя выражение (17) для колебаний бесконечной струны, можно рассчитать значения функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ в любой точке. В частности, при $x = 0$ получим:

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \varphi_1(z) dz$$

Если функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$ нечетные, то оба слагаемых, содержащих $\sin \frac{\pi k}{2}$, обращаются в нуль. Таким образом, следует отметить, что если функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$ являются нечетными, то предельное условие, действующее на окружности в плоскости $t = t_1$, выполняется автоматически, то есть без дополнительных условий на этих функциях.

Применение метода Фурье в данной задаче приводит к замене ряда Фурье на соответствующий интеграл Фурье. Учитывая предельное условие, получаются решения вида:

$$u = (A \cos akt + B \sin akt) \sin kx.$$

Как было ранее упомянуто, первое предельное условие нарушается лишь при значениях параметра k, кратных 2. Не существует второго предельного условия, что подразумевает возможность использования всех значений параметра k. В итоге, возникает непрерывный спектр возможных частот k в полубесконечной струне.

Вместо дискретного суммирования значений k, в данном случае необходимо использовать интегрирование по параметру k, предполагая, что функции A и B зависят от k. Такой метод интегрирования значительно улучшит точность вычисления функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ в сравнении с другими методами.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(k) \cos akt + B(k) \sin akt] \sin kx dk. \tag{65}$$

Функции $A(k)$ и $B(k)$ необходимо подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли начальным условиям (63). И только после того, как мы найдем эти функции, сможем получить дальнейший результат:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \sin kx dk, \quad \varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} akB(k) \sin kx dk. \tag{66}$$

При сравнении этих формул с формулой Фурье для нечетной функции можно заметить различия, которые описывают разные свойства исследуемого объекта.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d a,$$

Функции $A(k)$ и $B(k)$ определяются следующим образом:

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi, \quad B(k) = \frac{1}{\pi a k} \int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) \sin k\xi d\xi,$$

что позволяет получить точное решение для данной задачи. И, подставляя в формулу (65), получаем решение задачи

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sin k\xi\sin kxd_{\xi}\right\}dk,$$

Или, если учитывать четность подынтегральной функции как функции от k: $u(x,t)=$
$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi d\xi\right\}\sin kxdk$. Применение формулы Фурье демонстрирует, что правая часть данной формулы эквивалентна правой части уравнения (17), если функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ обладают нечетностью. Аналогично данному примеру, можно рассмотреть и другие уравнения с применением формулы Фурье:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Рассмотрим предельную задачу для полуплоскости $y\geqslant 0$ с граничным условием на границе.

$$u|_{y=0}=0 \tag{67}$$

и любыми начальными условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,y)$$
$$(-\infty<x<+\infty;y\geqslant 0). \tag{68}$$

После проверки нечетности продолжения функций $\varphi(x,y)$ и $\varphi_1(x,y)$ по аргументу y на интервале $(-\infty,0)$, мы получаем решение задачи. Для $y=0$ первое слагаемое формулы может быть компактно записано следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}\frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-\beta^2}}d\beta\right]d\alpha,$$

В силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной β, значение внутреннего интеграла первого слагаемого формулы равняется нулю при всех значениях x и t. Аналогично, второе слагаемое также обращается в нуль, что подтверждает выполнение условия (67).

В качестве метода решения данной задачи можно использовать подход, основанный на методе Фурье, включающий представление функции двух переменных через интеграл Фурье. Тем не менее, проверка тождества получаемого решения представляет существенную сложность по сравнению с линейным случаем.

Аналогично можно рассмотреть задачу о распространении волны в полупространстве $z\geqslant 0$ с граничным условием $u=0$ на границе $z=0$. Кроме того, метод Фурье может быть использован для решения задачи о распространении волны в безграничном пространстве с заданными начальными условиями. Тем не менее, использование данного метода дополнительно требует проведения более длительных и сложных вычислений, отличающихся от тех, которые были описаны ранее.

9. Примеры применения интеграла Фурье для дифференциальных уравнений колебания плоской мембраны. Рассмотрим три разных дифференциальных уравнения колебаний плоской мембраны и их решения с помощью метода интеграла Фурье.

1. Уравнение колебаний с закрепленными краями:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)$$

с начальными условиями:

$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0.$$

Применяя преобразование Фурье по координатам x и y, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(k_x,k_y,t)=-c^2(k_x^2+k_y^2)\hat{u}(k_x,k_y,t),$$

где $\hat{u}(k_x,k_y,t)$ - спектральная функция. Решением этого уравнения является функция:

$$\hat{u}(k_x,k_y,t)=A(k_x,k_y)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+B(k_x,k_y)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t),$$

где $A(k_x,k_y)$ и $B(k_x,k_y)$ - произвольные постоянные. Применяя обратное преобразование Фурье, получим:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(A(k_x,k_y)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+$$
$$+B(k_x,k_y)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t))e^{i(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (A(k_x,k_y)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+$$

$$+B(k_x,k_y)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t))e^{i(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y.$$

2. Уравнение колебаний с свободными краями:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$$

с начальными условиями:

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по координатам x и y, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(k_x,k_y,t) = -c^2(k_x^2+k_y^2)\hat{u}(k_x,k_y,t),$$

где $\hat{u}(k_x,k_y,t)$ - спектральная функция. Решением этого уравнения является функция:

$$\hat{u}(k_x,k_y,t) = (A(k_x,k_y)+B(k_x,k_y)t)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+$$

$$+(C(k_x,k_y)+D(k_x,k_y)t)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t),$$

где $A(k_x,k_y)$, $B(k_x,k_y)$, $C(k_x,k_y)$ и $D(k_x,k_y)$ - произвольные постоянные. Применяя обратное преобразование Фурье, получим:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [(A(k_x,k_y)+B(k_x,k_y)t)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+$$

$$+(C(k_x,k_y)+D(k_x,k_y)t)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)]e^{i(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [(A(k_x,k_y)+B(k_x,k_y)t)\cos(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)+$$

$$+(C(k_x,k_y)+D(k_x,k_y)t)\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t)]e^{i(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y.$$

3. Уравнение колебаний с смешанными краями:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$$

с начальными условиями:

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по координатам x и y, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(k_x,k_y,t) = -c^2(k_x^2+k_y^2)\hat{u}(k_x,k_y,t),$$

где $\hat{u}(k_x,k_y,t)$ - спектральная функция. Решением этого уравнения является функция:

$$\hat{u}(k_x,k_y,t) = X(k_x)\cdot Y(k_y)\cdot\sin(c\sqrt{k_x^2+k_y^2}t),$$

где $X(k_x)$ и $Y(k_y)$ - произвольные постоянные, определяющие форму мембраны. Применяя обратное преобразование Фурье, получим:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n\cdot Y_n\cdot\sin(c\sqrt{k_n}t)\sin(k_n x)\sin(k_m y),$$

где $k_n = \frac{n\pi}{a}$, $k_m = \frac{m\pi}{b}$, а X_n и Y_m - произвольные постоянные, определяющие форму мембраны. Таким образом, решение имеет вид:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n\cdot Y_m\cdot\sin(c\sqrt{k_n^2+k_m^2}t)\sin(k_n x)\sin(k_m y).$$

10. Заключение. В результате выполнения данной дипломной работы был проведен анализ свойств колебаний плоской мембраны, создана математическая модель колебательного процесса и разработаны методы решения дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс. Был применен метод интеграла Фурье для решения уравнения колебаний плоской мембраны. Результаты проверены и проанализированы.

В ходе исследования было показано, что математическая модель колебаний плоской мембраны может быть описана с помощью уравнения колебаний. Было проведено сравнение полученных результатов с результатами, полученными другими методами, и было установлено, что метод интеграла Фурье дает точные результаты.

Таким образом, данная дипломная работа позволяет рассмотреть некоторые важные аспекты колебательного процесса плоской мембраны и предлагает эффективный метод решения дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс. Полученные результаты могут использоваться для создания более точных и эффективных технических устройств, основанных на колебательных процессах плоской мембраны.

Благодарность. *Автор выражают благодарность научному руководителю Ситнику Сергею Михайловичу за помощь в выборе тематики исследования, ценные советы и постоянное внимание к работе.*

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. 1994. Задачи по математической физике. М., МГУ, 350.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2000. Уравнения математической физики: учеб. для вузов. М., Наука, 512.
3. Соболев С. Л. 1966. Уравнения математической физики. М., Наука, 444.
4. Тимошенко С. П. 1985. Колебания в инженерном деле. М., Машиностроение, 472.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. Уравнения математической физики. М., Наука, 736.

Поступила в редакцию 24.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Терещенко Александр Олегович – магистрант 2-го года обучения, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 1247961@bsu.edu.ru

РУКОВОДИТЕЛЬ

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: sitnik@bsu.edu.ru